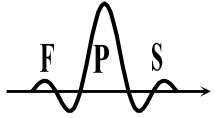


# Sumário

- *Técnicas de Projeto de Filtros Discretos (2ª Parte)*
  - *Projeto de filtros FIR: o método da janela*
    - *introdução*
    - *o fenómeno de Gibbs*
    - *janelas comumente usadas*
    - *dificuldades do método*
    - *filtros FIR especiais*
  - *Projeto ótimo de filtros FIR de fase linear*
    - *introdução*
    - *o teorema da alternância*
    - *o algoritmo de Parks McClellan*
    - *síntese das vantagens do projeto ótimo*
  - *Comentários finais*

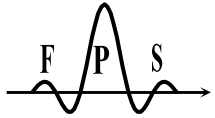


# Projeto de Filtros FIR

- Introdução

- o projeto de filtros FIR é um problema de aproximação de funções através de polinómios (no caso dos filtros IIR era através de funções racionais)
- não tendo paralelo nos filtros contínuos (contrariamente ao que acontecia com os filtros IIR), os filtros FIR recorrem a técnicas próprias de projeto de sistemas discretos que podem, por exemplo, garantir de forma intrínseca a condição de fase linear
- há basicamente três técnicas de projeto de filtros FIR:
  - método da janela
  - método iterativo de projeto ótimo (“*Remez Multiple Exchange*”)
  - amostragem da resposta em frequência

analisaremos aqui as duas primeiras técnicas e a terceira será abordada mais tarde.



# Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

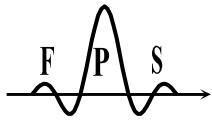
- O método da janela
  - este método parte da especificação da selectividade ideal em frequência desejada para o filtro (ver ‘slide’ 3 do conjunto anterior de slides) da qual decorre a resposta impulsional do filtro ideal:

$$\boxed{H_d(e^{j\omega})} \xleftrightarrow{F} \boxed{h_d[n]}$$

como já notado anteriormente, se a especificação ideal de  $H(e^{j\omega})$  for descontínua,  $h_d[n]$  é irrealizável porque é anti-causal e o seu comprimento é infinito

- de modo a tornar o filtro realizável, pode-se limitar  $h_d[n]$  em forma e comprimento, através da sua multiplicação por uma janela  $w[n]$  de comprimento  $N$ :

$$\boxed{h[n] = h_d[n] \cdot w[n]} \xleftrightarrow{F} \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta}$$

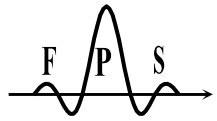


## Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

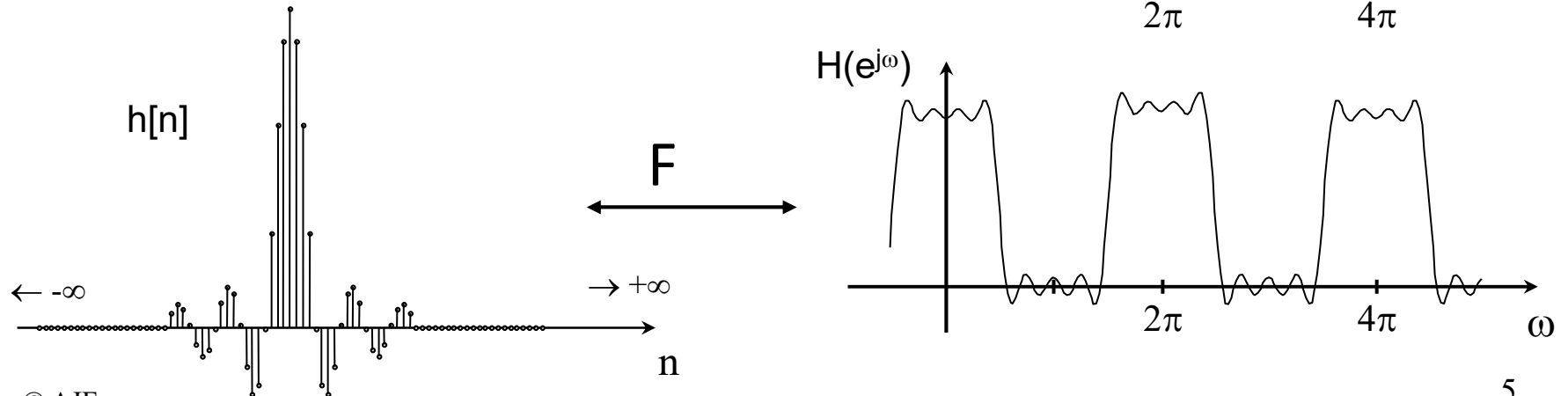
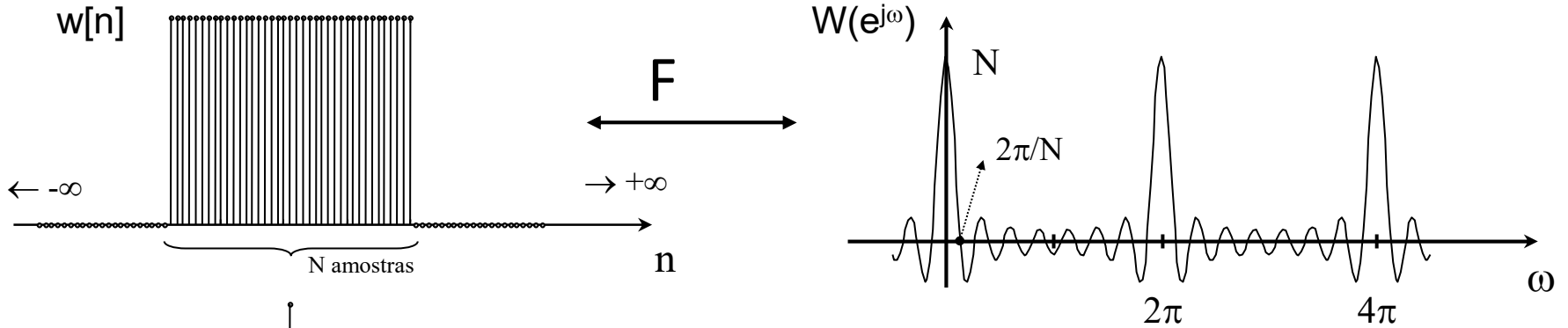
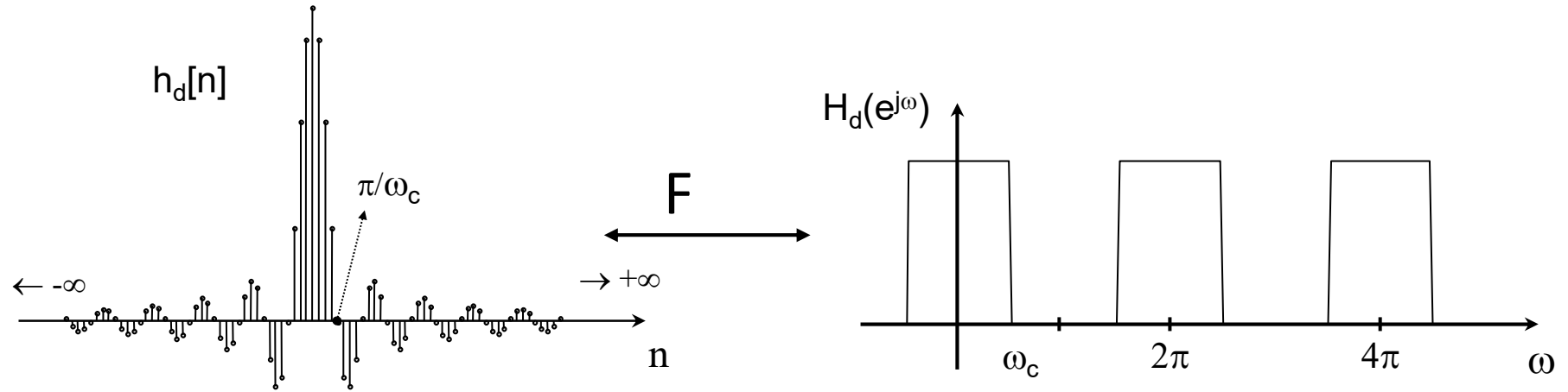
- esta operação tem por implicação no domínio de Fourier, a convolução periódica entre  $H_d(e^{j\omega})$  e  $W(e^{j\omega})$ , o que significa que  $H(e^{j\omega})$  será uma versão suavizada (isto é, não-descontínua) de  $H_d(e^{j\omega})$ , mas causando também oscilações na sua resposta em frequência, particularmente junto das regiões de transição entre bandas, o que é conhecido por fenómeno de Gibbs
- no caso de  $w[n]$  ser uma janela retangular de comprimento  $N$  (o que na prática significa que o seu efeito será simplesmente o de truncar a resposta impulsional de  $h_d[n]$  a  $N$  amostras) e, considerando causalidade, será:

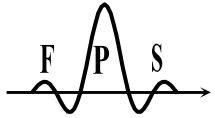
$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathbf{F}} W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

- o ‘slide’ seguinte ilustra o efeito nas frequências da multiplicação em  $n$  da resposta impulsional de um filtro ideal do tipo passa-baixo por uma janela retangular (*i.e.* ilustra o fenómeno de Gibbs para este  $h_d[n]$  e  $w[n]$  )



# Ilustração do Fenômeno de Gibbs





# Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

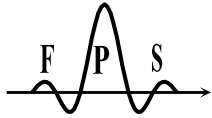
- O Fenómeno de Gibbs

- uma análise mais detalhada da ilustração e expressões anteriores revela que:

- à medida que  $N$  cresce, o 'lóbulo' principal de  $W(e^{j\omega})$  (região entre os dois primeiros zeros de cada lado da origem e de largura  $4\pi/N$  para o caso da janela retangular) estreita, mas a área total sob o lóbulo principal mantém-se constante já que a sua magnitude aumenta correspondentemente

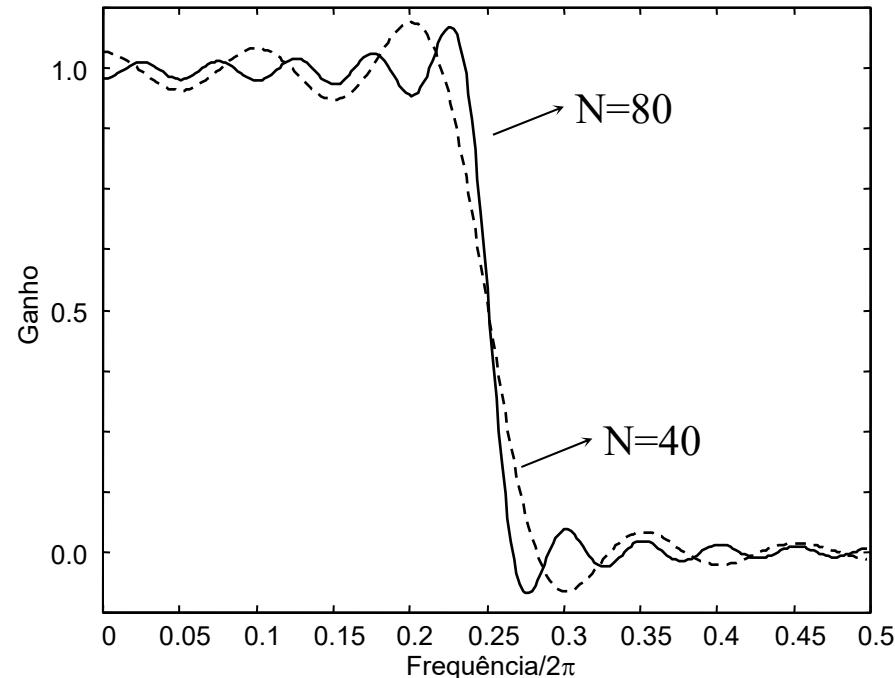
**NOTA:** na verdade, a área de cada um dos lóbulos (apesar de diferir entre si) mantém-se constante, independentemente do valor de  $N$

- dado o facto de  $W(e^{j\omega})$  ter lóbulos positivos e negativos e de diferentes áreas, ao realizar-se a convolução de  $W(e^{j\omega})$  com a função  $H_d(e^{j\omega})$ , resulta que o integral do produto de uma função pela outra deslizada origina oscilações mais evidentes na vizinhança dos pontos de transição abrupta de  $H_d(e^{j\omega})$
- à medida que  $N$  cresce, as oscilações resultantes da convolução entre  $W(e^{j\omega})$  e  $H_d(e^{j\omega})$  ocorrem mais rapidamente, MAS não diminuem de amplitude → esta é a essência do chamado fenómeno de GIBBS

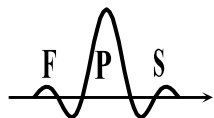


## Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

- a figura seguinte exemplifica as oscilações obtidas para  $N=40$  e  $N=80$



- a única forma de moderar o fenómeno de Gibbs, isto é de se obterem oscilações de menor amplitude na característica de  $H(e^{j\omega})$ , ou por outras palavras, de obter um menor “ripple”, é:
  - usar para  $H_d(e^{j\omega})$  uma característica de magnitude sem transições abruptas entre bandas
  - usar janelas suaves que em vez de truncar simplesmente  $h_d[n]$ , também suavizam a resposta impulsional nos extremos do seu comprimento; porém o custo deste menor “ripple” traduz-se em bandas de transição mais largas do que as resultantes de se usar a janela retangular



# Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

- Janelas comumente usadas
  - para além da janela retangular, há outras janelas frequentemente usadas e referidas na literatura (das quais referiremos quatro) e que têm todas a particularidade comum de serem simétricas (naturalmente para facilitar o projeto de filtros FIR com fase linear):

- janela retangular  $w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$

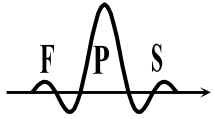
- janela triangular ou de Bartlett  $w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases}$

- janela de Hanning  $w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos \frac{n2\pi}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$

- janela de Hamming  $w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos \frac{n2\pi}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$

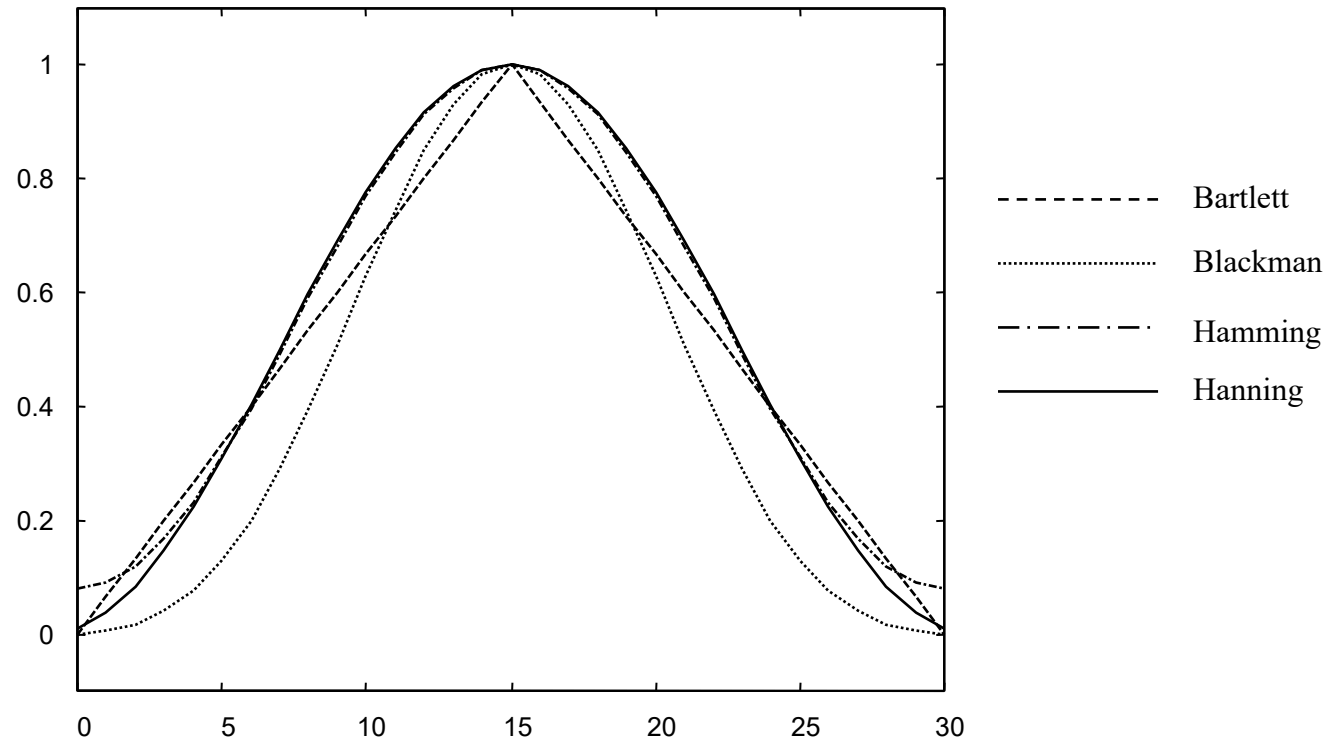
- janela de Blackman  $w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos \frac{n2\pi}{N-1} + 0.08 \cos \frac{n4\pi}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$



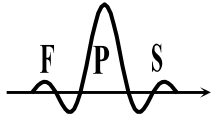


## Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

- a forma destas janelas pode ser comparada através da representação seguinte, em que se considera  $N=31$ :

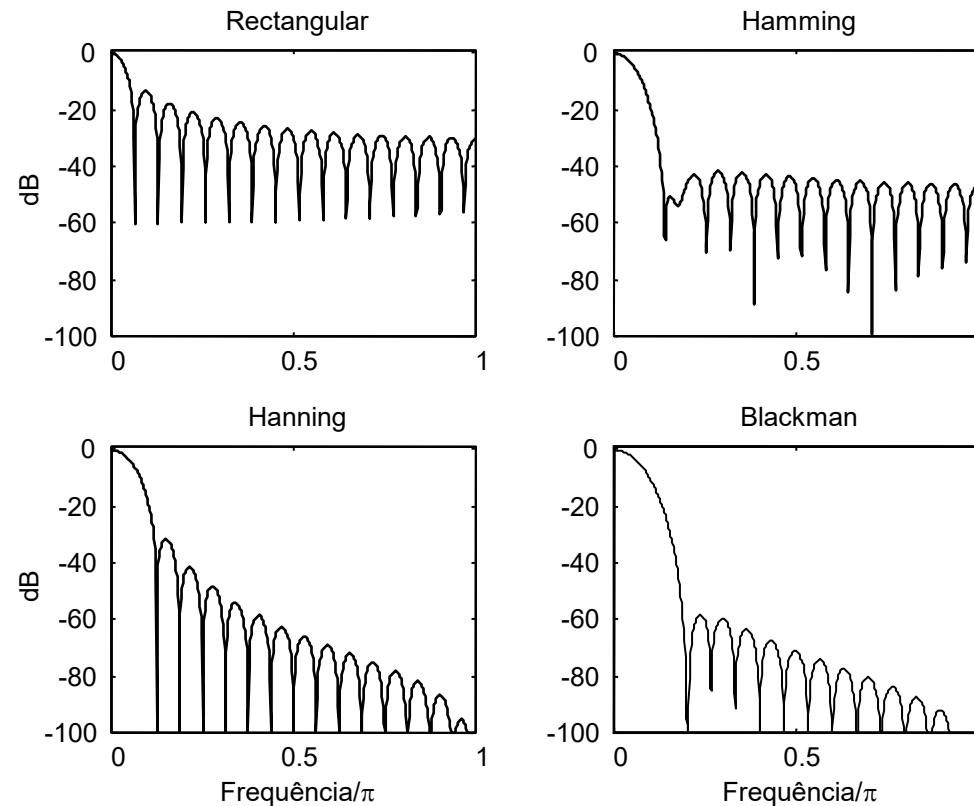


- as janelas ilustradas são muito usadas quer para o projeto de filtros FIR através do método da janela, quer particularmente para análise espectral, como veremos mais tarde

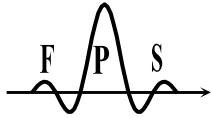


## Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

- a resposta em frequência das janelas retangular, Hamming, Hanning e Blackman, com  $N=31$ , ilustra-se a seguir:



- todas as janelas têm o lóbulo principal centrado em  $\omega=0$  que é seguido de lóbulos laterais com amplitude decrescente.

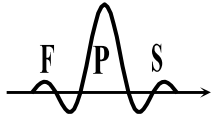


## Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

- é comum comparar as várias janelas com base em dois parâmetros de mérito que são:
  - a largura do lóbulo principal  $\therefore$  o que vai afectar no projeto de filtros FIR a largura da banda de transição
  - a atenuação relativa entre o lóbulo principal e o maior lóbulo lateral  $\therefore$  o que vai afectar no projeto de filtros FIR a amplitude do “ripple”

janela	largura do lóbulo principal	atenuação relativa do maior lóbulo lateral
Rectangular	$4\pi/N$	-13 dB
Triangular	$8\pi/N$	-25 dB
Hamming	$8\pi/N$	-41 dB
Hanning	$8\pi/N$	-31 dB
Blackman	$12\pi/N$	-57 dB

→ **questão:** qual é a melhor janela ?



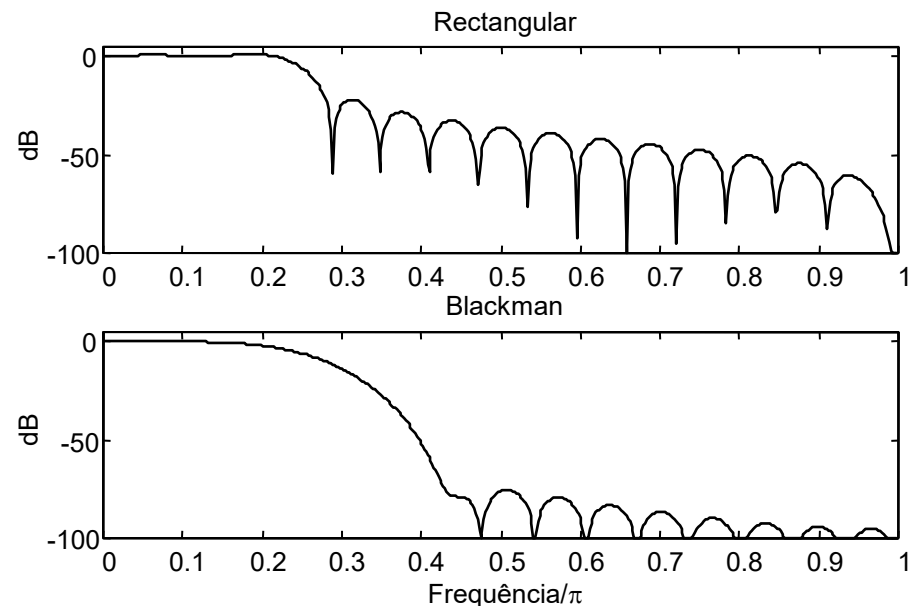
# Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

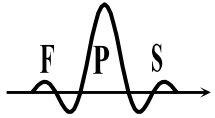
→ EXEMPLO: projectar um filtro FIR, de comprimento 32 (isto é, de ordem 31), do tipo passa-baixo e com banda passante até  $0.25\pi$  radianos, através do método da janela, usando a janela retangular e a janela de Blackman

**R:** em alternativa ao procedimento 'manual', podemos usar o seguinte código Matlab:

```
hr=fir1(31,0.25,boxcar(32));  
hb=fir1(31,0.25,blackman(32));  
[Hr,W]=freqz(hr,1,512); Hr=Hr/Hr(1);  
[Hb,W]=freqz(hb,1,512); Hb=Hb/Hb(1);  
subplot(2,1,1); plot(W/pi,20*log10(abs(Hr)));  
axis([0 1 -100 5]); title('Rectangular'); ylabel('dB');  
subplot(2,1,2); plot(W/pi,20*log10(abs(Hb)));  
axis([0 1 -100 5]); title('Blackman');  
xlabel('Frequência/p'); ylabel('dB');
```

**NOTA:** facilmente se conclui que resulta uma melhor atenuação na banda de corte quando se utiliza a janela de Blackman, mas a contrapartida é uma penalização na banda de transição, que é menor quando se usa a janela retangular





# Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

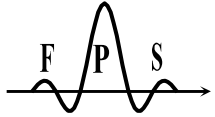
- Dificuldades do Método

- como se depreende pela natureza deste método de projeto, o controlo de parâmetros importantes do filtro projectado tais como:

- a frequência de passagem ou de corte,
- a largura das bandas de transição e
- a atenuação em cada banda de rejeição do filtro projectado,

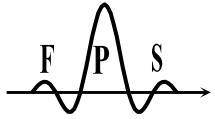
não é totalmente efetivo, razão pela qual é frequente ter-se que iterar o projeto (variando quer o tipo de janela, quer o comprimento do filtro), até que o filtro final satisfaça as especificações

- por outro lado, o “ripple” existente em cada lado de uma dada banda de transição, é aproximadamente igual, não sendo possível beneficiar um em detrimento do outro



# Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

- Dificuldades do Método (*cont.*)
  - para contornar algumas das dificuldades anteriores, há pelo menos duas alternativas:
    - 1 em vez das janelas fixas apresentadas, usar para o método da janela uma janela flexível e especial: a janela de Kaiser
      - através da actuação nos parâmetros de forma e comprimento, esta janela permite o controlo da largura do seu lóbulo principal e da atenuação relativa dos lóbulos laterais, o que facilita o projeto não-iterativo através do uso de fórmulas empíricas; contudo, não analisaremos aqui esta janela que tem a particularidade de usar uma função de Bessel de ordem zero [ver secção 7.2.3 do Oppenheim]
    - 2 usar um outro método de projeto de filtros FIR
      - iremos analisar de seguida um procedimento computacional e iterativo para o projeto “ótimo” de filtros FIR que fornece o filtro FIR mais curto que cumpre as especificações pretendidas, permitindo também controlar outros parâmetros como por exemplo, o “ripple” em cada um dos lados de uma banda de transição



# Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

- filtros FIR especiais

## diferenciadores

- Permitem obter amostras da derivada de um sinal contínuo e de banda limitada, a partir de amostras deste.

Ideia:

$$\left. \begin{array}{l} x_c(t) \\ \frac{d x_c(t)}{dt} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\mathbf{F}} \left\{ \begin{array}{l} X_c(\Omega) \\ j\Omega X_c(\Omega) \end{array} \right.$$

se o sistema discreto implementar:

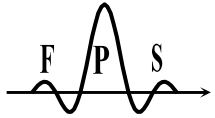
$$H_{diff}(e^{j\omega}) = j\Omega \Big|_{\Omega=\frac{\omega}{T}} = j\frac{\omega}{T}, \quad |\omega| < \pi$$

então:

$$\left. \frac{d x_c(t)}{dt} \Big|_{t=nT} \right\} \xleftrightarrow{\mathbf{F}} \left. H_{diff}(e^{j\omega}) X_c\left(\frac{\omega}{T}\right) \Big|_{\omega=\Omega T} \right\}, \quad |\Omega| < \frac{\pi}{T}$$

um filtro diferenciador discreto e com fase linear é assim definido por (omitindo a constante T e simplificando para fase nula):

$$H_{diff}(e^{j\omega}) = j\omega, \quad |\omega| < \pi \quad \xleftrightarrow{\mathbf{F}} \quad h_{diff}[n] = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{\cos n\pi}{n}, & |n| > 0 \end{cases}$$



# Projeto de Filtros FIR pelo Método da Janela

- filtros FIR especiais (*cont.*)

transformador de Hilbert

- é um filtro passa-tudo que efectua uma rotação constante de fase de  $\pm\pi/2$  e usa-se na geração de sinais analíticos:

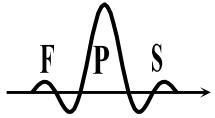
$$\boxed{H_{TH}(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & -\pi < \omega < 0 \\ -j, & 0 < \omega < \pi \end{cases}} \xleftrightarrow{\mathbf{F}} \boxed{h_{TH}[n] = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2 \frac{\sin^2\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n\pi}, & |n| > 0 \end{cases}}$$

**Nota 1:** considerando causalidade, a expressão para a resposta impulsional pode diferir significativamente das apresentadas em que se considera fase nula.

**Nota 2:** estes dois filtros especiais podem ser projectados quer pelo método da janela, quer através do algoritmo de projeto ótimo que se apresenta a seguir.

**Questão:** sendo simétricos e tendo comprimento finito, a que tipos de filtros FIR de fase linear é que estes dois filtros FIR especiais podem pertencer? Um transformador de Hilbert pode ser do tipo 4?





# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

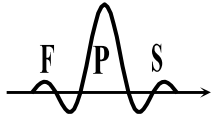
- Introdução

- baseia-se num algoritmo computacional que procura iterativamente o filtro FIR, com resposta  $H(e^{j\omega})$ , que melhor aproxima uma resposta em frequência desejada  $H_d(e^{j\omega})$ , de acordo com o critério de minimização do erro máximo de aproximação (minimax), dentro das bandas de frequência de interesse (*i.e.* excetuando as de transição ou “don’t care”)

- Nota preliminar: a função que se quer minimizar não é:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

cuja solução é a correspondente ao método da janela usando a trivial janela retangular (o que significa truncar simplesmente a resposta impulsional a um comprimento desejado), com todas as desvantagens associadas !



# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

- para colocar em perspectiva o problema de optimização ‘minimax’ apresentam-se algumas noções prévias:
  - como já vimos, um filtro FIR de fase linear pode exprimir-se por:

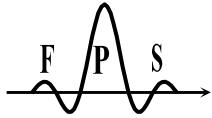
$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\alpha - \beta)}$$

com  $A(e^{j\omega})$  real, em que  $\alpha$  e  $\beta$  dependem só do tipo do filtro FIR de fase linear, não influenciando portanto o problema da optimização, pelo que o problema de optimização simplifica-se se se encontrar uma forma de normalização em que estas constantes sejam omitidas.

Tomando por exemplo um filtro FIR do tipo 1 centrado em  $n=0$  (sem perda de generalidade para um qualquer filtro causal com comprimento  $N$  ímpar que induz um atraso constante de  $(N-1)/2$  amostras) será:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} h_1[n]e^{-j\omega n} = h_1[0] + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} h_1[n] \cos(n\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h'_1[n] \cos(n\omega) = A_1(e^{j\omega})$$

concluindo-se que a função a otimizar é uma soma ponderada de cossenos harmónicos (ou seja, uma função real, par e periódica) .



# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

prova-se [ver por exemplo, T. W. Parks e C. S. Burrus em “Digital Filter Design”, John Wiley & Sons, Inc. 1987 ou Aníbal Ferreira em “Filtros Digitais”, relatório Inesc RI-7/90] que qualquer que seja o tipo do filtro FIR de fase linear, é possível exprimir a função a otimizar de uma forma uniformizada:

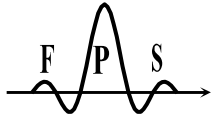
$$A(e^{j\omega}) = Q(\omega) \sum_{n=0}^r c[n] \cos(n\omega)$$

em que  $r$  depende do comprimento e do tipo pretendido para o filtro FIR, e em que  $Q(\omega)$  depende só do tipo do filtro FIR de fase linear:

$$Q(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{FIR tipo 1} \\ \cos(\omega/2), & \text{FIR tipo 2} \\ \sin(\omega), & \text{FIR tipo 3} \\ \sin(\omega/2), & \text{FIR tipo 4} \end{cases}$$

por exemplo, para um comprimento  $N$  ímpar, seria  $r=(N-1)/2$  e para um comprimento  $N$  par, seria  $r=N/2-1$

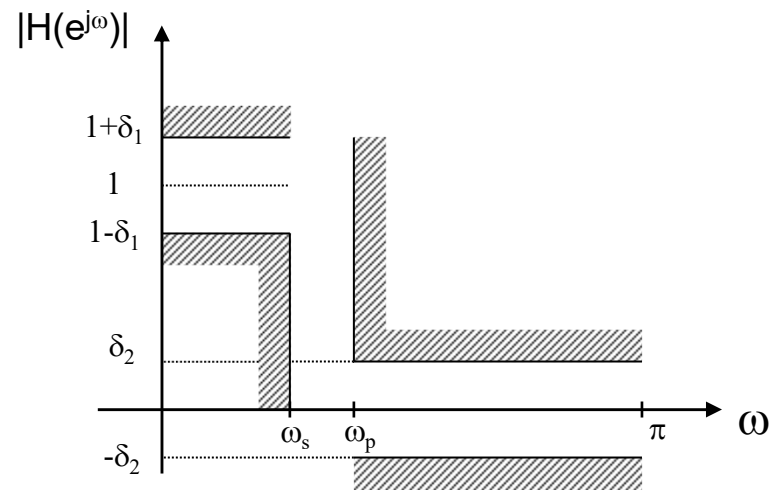
**Questão:** em que medida é que a função  $Q(\omega)$  denuncia o tipo de filtro FIR ?



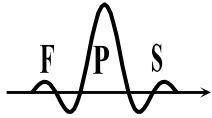
# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

Neste pressuposto, basta avaliar o comportamento da função comum aos quatro tipos de filtros FIR de fase linear (que é um somatório de cossenos harmónicos) entre  $\omega=0$  e  $\omega=\pi$ .

Por exemplo, para um filtro do tipo passa-baixo, os limites de tolerância na aproximação são  $\delta_1$  em torno do valor desejado na banda passante, e  $\delta_2$  em torno do valor desejado na banda de corte:



A banda de transição é, por assim dizer, ignorada no processo de optimização (diz-se: “don’t care band”), esperando-se no final do projeto que a função  $H(e^{j\omega})$  seja aí bem comportada  $\therefore$  o que requer verificação !



# Projeto de Filtros FIR Ótimos de Fase Linear

Deste modo, o problema da aproximação ótima é formalizado através da seguinte expressão que traduz o erro da aproximação em frequência,  $E(\omega)$ :

$$E(\omega) = W(\omega) [H_d(e^{j\omega}) - A(e^{j\omega})]$$

em que:

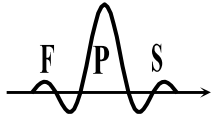
- $W(\omega)$  é uma função real de ponderação de erro, permitindo por exemplo especificar um erro  $\delta_2$  diferente de  $\delta_1$ , ou então um erro variável em frequência,

NOTA: para o caso ilustrado, pretendendo-se  $\delta_1 = K\delta_2$  será:

$$W(\omega) = \begin{cases} 1/K, & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 1, & \omega_s \leq \omega < \pi \end{cases}$$

- $H_d(e^{j\omega})$  é a resposta real desejada em frequência, podendo ser arbitrária (e não somente uma constante, como no caso ilustrado) dentro dos limites de cada banda de interesse (*i.e.* excetuando as de transição),
- $A(e^{j\omega})$  é a função real de aproximação contendo as incógnitas do problema (que não são explicitamente calculadas no processo iterativo, como veremos).

→ **NOTA IMPORTANTE:** a formalização anterior aplica-se só ao conjunto fechado (F) de frequências associadas às bandas de interesse, excluindo portanto as de transição; por exemplo, para o caso ilustrado, F:  $\omega \in [0, \omega_p] \cup [\omega_s, \pi]$



# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

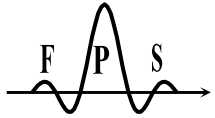
→ O problema assim formalizado é um problema de aproximação polinomial de Chebyshev em conjuntos fechados [ver secção 7.4 do Oppenheim], que pode ser resolvido aplicando o teorema da alternância.

**NOTA:** a função  $A(e^{j\omega})$  é de facto um polinómio uma vez que:

$$\sum_{n=0}^r c[n] \cos(n\omega) = \sum_{n=0}^r a[n] [\cos \omega]^n$$

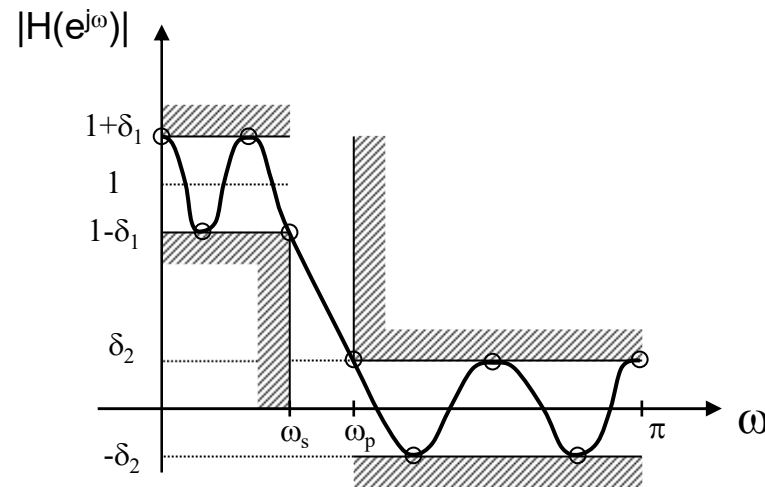
- Teorema da Alternância

a condição necessária e suficiente para que o polinómio  $\sum_{n=0}^r a[n] [\cos \omega]^n$  seja o único polinómio de grau  $r$  que minimiza o valor máximo de  $\|E(\omega)\|_{\omega \in F} = \delta$  no interior do intervalo fechado  $F$ , é que a função de erro ponderado  $E(\omega)$  exiba pelo menos ( $\therefore$  pode haver mais)  $r+2$  alternâncias em  $F$ , isto é, deverá haver pelo menos  $r+2$  valores  $\omega_i$  em  $F$  tais que  $\omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_{r+1}$  e tais que  $E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1}) = \pm\delta$ , para  $i=0, \dots, r$ .

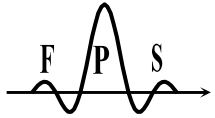


# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

- Teorema da Alternância (*cont.*)
  - como decorre deste teorema, o projeto ótimo produz filtros com um erro máximo de aproximação oscilante: ...,  $+\delta$ ,  $-\delta$ ,  $+\delta$ ,  $-\delta$ , ..., mas de igual magnitude, isto é, “equiripple”.
  - Exemplo ilustrativo:

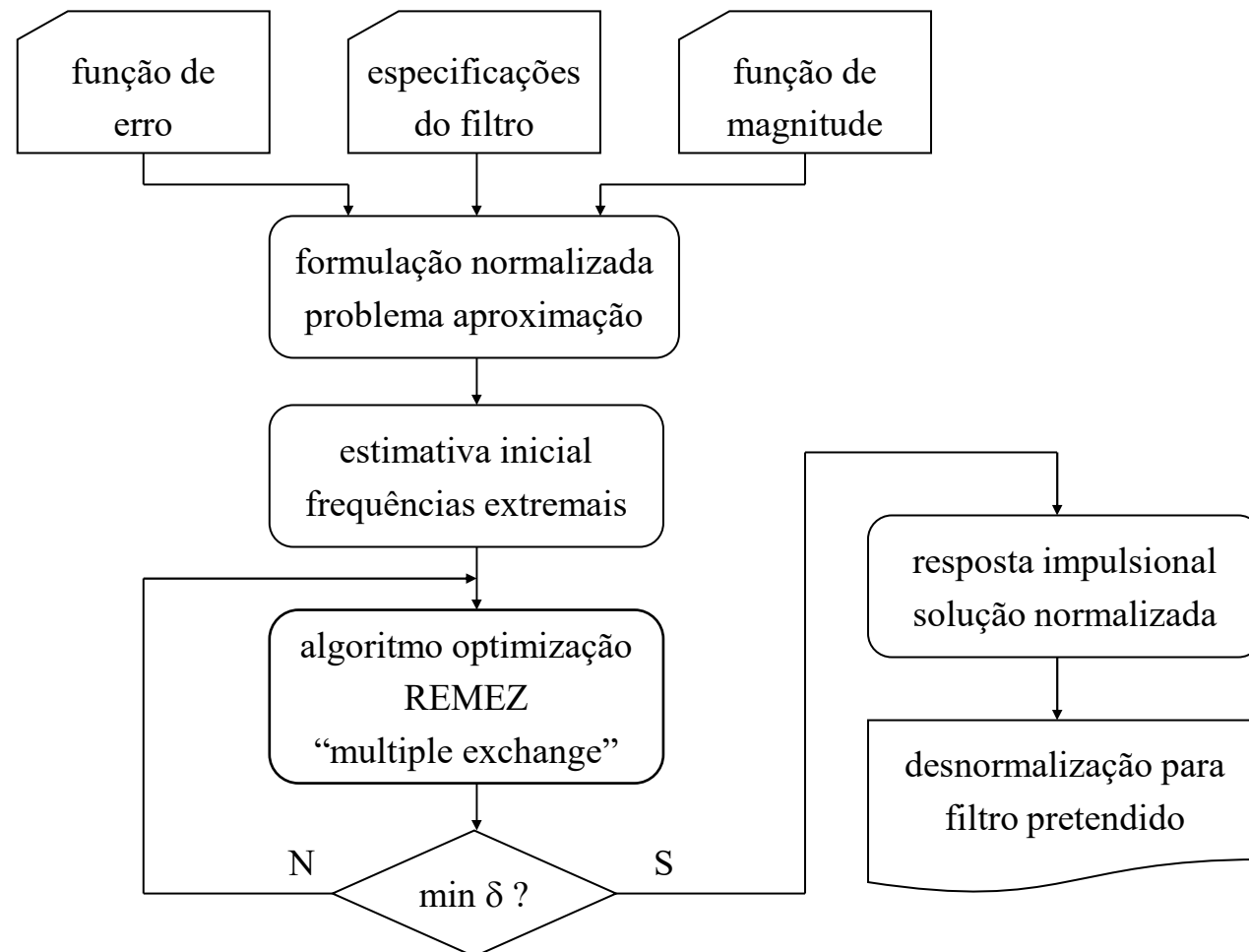


- NOTA: este exemplo contém 9 alternâncias em posições que se designam de frequências extremas, sugerindo que se trata de um filtro com  $N=15$ .

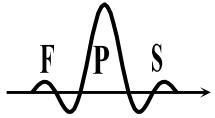


# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

- O Algoritmo de Parks-McClellan
  - é o algoritmo de projeto ótimo de filtros FIR de fase linear mais eficiente e flexível (e por isso popular... ) que resolve o problema de aproximação minimax, usando o teorema da alternância:

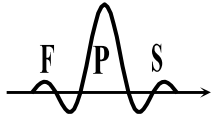






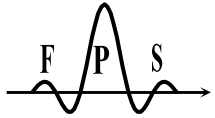
# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

- O Algoritmo de Parks-McClellan (*cont.* )
  - Como se depreende do diagrama anterior, o algoritmo de Parks McClellan inicia o processo iterativo com uma estimativa inicial para as frequências extremas, que são depois iterativamente ajustadas (por uma rotina Remez “multiple exchange”), de forma a observar o teorema da alternância e a minimizar o valor de  $|\delta|$ .
  - Um aspeto curioso de todo o procedimento é que as verdadeiras incógnitas que são os coeficientes da resposta ao impulso do filtro discretos, não são explicitamente avaliadas. De facto, no caso de haver convergência do processo, só no final é que a resposta ao impulso do filtro ótimo é obtida através da transformada de Fourier inversa de uma amostragem da resposta em frequência ótima normalizada.
    - NOTA: esta forma de obter os coeficientes da resposta ao impulso de um filtro discreto através de uma amostragem da sua resposta em frequência é, em si, um método de projeto autónomo (referido no ‘slide’ 2 desta aula) que analisaremos mais adiante, em detalhe.



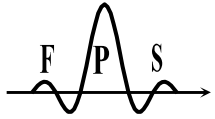
# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

- Síntese das vantagens do projeto ótimo de filtros FIR de fase linear pelo algoritmo de Parks McClellan
  - projeta filtro ótimos (no sentido ‘minimax’) de qualquer um dos quatro tipos de filtros FIR de fase linear (incluindo diferenciadores e transformadores de Hilbert),
  - permite controlar individualmente o erro de aproximação em cada banda,
  - permite aproximar qualquer forma de resposta em frequência (e não simplesmente do tipo plana), o que é por exemplo conveniente para projectar filtros incorporando a compensação  $\sin(x)/x$ ,
  - permite o projeto de filtros multibanda,
  - dispõe de expressões empíricas que estimam a ordem necessária para satisfazer as especificações pretendidas,
  - é de convergência rápida.
- CONTUDO: após o projeto, é conveniente confirmar que devido a eventuais problemas de convergência, não ocorrem comportamentos anómalos nas regiões de transição (isto é, nas “don’t care bands”).



# Projeto de Filtros FIR Óptimos de Fase Linear

- exemplo de projeto de filtro ótimo através do Matlab:
  - especificações:
    - comprimento  $N=33$
    - três bandas:
      - banda 1:  $0.0 \leftrightarrow 0.4\pi$  rad.
      - banda 2:  $0.5\pi \leftrightarrow 0.75\pi$  rad.
      - banda 3:  $0.8\pi \leftrightarrow \pi$  rad.
    - amplitudes:
      - banda 1: linear de  $0.25 \leftrightarrow 1.0$
      - banda 2: plana a  $0.5$
      - banda 3: plana a  $0.0$
    - erro de aproximação:
      - banda 1: ponderação 3, ou seja, erro= $\delta/3$
      - banda 2: ponderação 2, ou seja, erro= $\delta/2$
      - banda 3: ponderação 1, ou seja, erro= $\delta$
  - **NOTA:** para além de permitir configurar bandas com variação linear, a função `firpm` do Matlab permite usar funções genéricas, e.g.,  $x/\sin(x)$



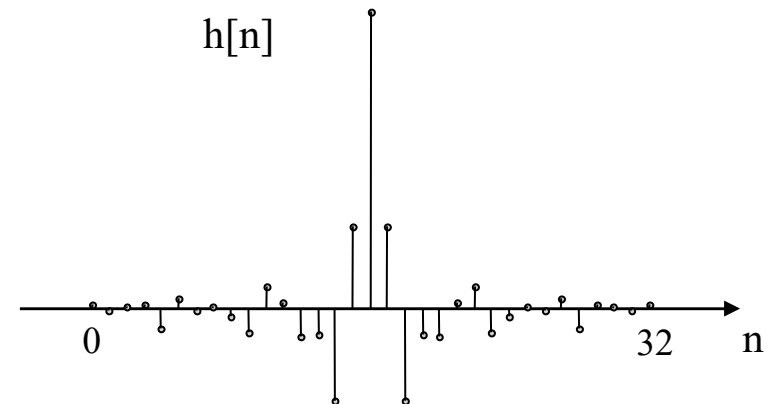
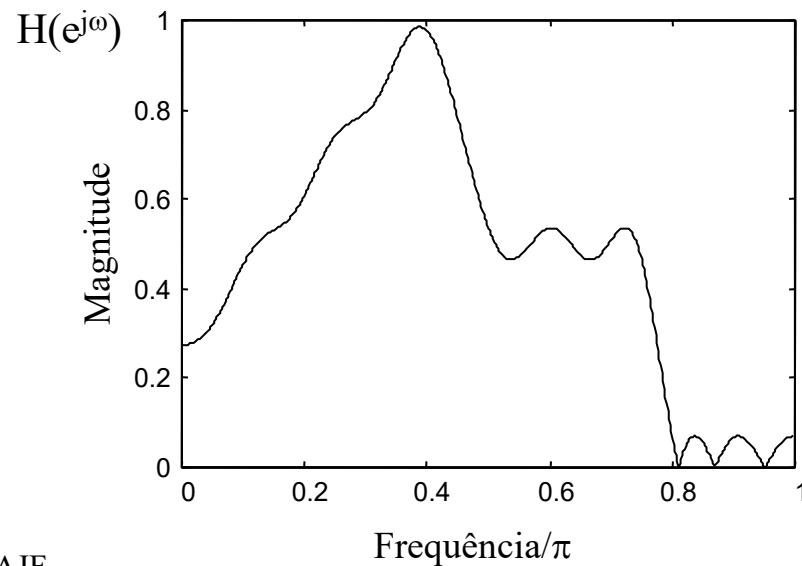
# Projeto de Filtros FIR Ótimos de Fase Linear

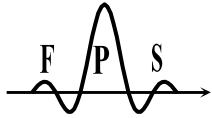
- exemplo de projeto de filtro ótimo através do Matlab (*cont.*)

– código Matlab:

```
f=[0    0.4 0.5 0.75 0.8 1.0]; % 3 bandas
m=[0.25 1    0.5 0.5 0    0]; % amplitudes
w=[3    2    1]; % ponderação
b=firpm(32, f, m, w);
[H,W]=freqz(b,1,512);
figure(1);
plot(W/pi,abs(H))
ylabel('Magnitude'); xlabel('Frequência/\pi');
figure(2);
stem(b);
```

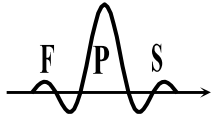
– filtro ótimo:





# Técnicas de Projeto de Filtros Discretos

- Comentários finais
  - em geral, é verdade que para sintetizar uma dada especificação de magnitude de resposta em frequência, é mais eficiente (*i.e.* ter-se-á um filtro de menor ordem se se) usar um filtro do tipo IIR,
  - os filtros FIR são os únicos que permitem comportamento de fase rigorosamente linear, o que é desejável em muitas aplicações,
  - comandos interessantes em Matlab para análise/projeto de filtros:
    - FVTOOL: GUI allowing to analyze digital filters
    - FDATool: GUI allowing to design and analyse digital filters (IIR, FIR)
  
    - BUTTER (IIR): Butterworth filter design
    - CHEBY1 (IIR): Chebyshev type-1 filter design
    - CHEBY2 (IIR): Chebyshev type-2 filter design
    - ELLIP (IIR): Elliptic filter design
  
    - FIRPM (FIR): Parks-McClellan optimal equiripple FIR filter design
    - FIR1 (FIR): FIR filter design using the window method
  
    - FIR2 (FIR): FIR arbitrary shape filter design using the frequency sampling method



# Técnicas de Projeto de Filtros Discretos

